Soluții clasa a IX-a

Problema 1

a)Se verifică prin calcul direct (3p)

b)Aplicând eventual a) ecuația devine $\left(3x-2x^2\right)^2=0$ cu soluțiile $x_1=0; x_2=\frac{3}{2}.(4p)$

Problema 2

a)Evident (2p)

b)Cazul(i) $\frac{2x}{x^2+1}\in[0,1)\Rightarrow\left[\frac{2x}{x^2+1}\right]=0\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]=0\Rightarrow x\in[0,2);(2p)$

Cazul (ii) $\frac{2x}{x^2+1}=1\Rightarrow x=1\Rightarrow\left[\frac{2x}{x^2+1}\right]=1\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]=1\Rightarrow x\in[2,4)$ Fals(1p)

Cazul (iii) $\frac{2x}{x^2+1}\in[-1,0)\Rightarrow\left[\frac{2x}{x^2+1}\right]=-1\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]=-1\Rightarrow x\in[-2,0);$(2p)

Problema3

a)Se verifică prin inducție matematică sau calcul direct.(3p)

b) Folosind identitatea Botez –Catalan membrul drept se scrie

$$M_d=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\ldots+\frac{1}{1318}\right)+\frac{1}{1319}=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318}\right)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)=\frac{1979}{660\cdot1319}+\frac{1979}{661\cdot1318}+\ldots+\frac{1979}{989\cdot990}$$

Aducând la același numitor putem scrie

$$\frac{p}{q}=\frac{1979k}{660\cdot661\cdot\ldots\cdot1319}$$

cu $k\in\mathbb{N}$. Deoarece 1979 este număr prim, de aici rezultă cerința problemei.(4p)

Problema 4

Alegem vectorii $\overrightarrow{BA}$ si $\overrightarrow{BC}$ ca bază a planului și avem:

$$\overrightarrow{BG}=\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}}{3}=\frac{2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{3}$$

$$\overrightarrow{BI}=\frac{c\overrightarrow{BA}+(b+c)\overrightarrow{BC}}{a+b+c};\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}. \quad (2p)$$

De unde obținem

$$\overrightarrow{GM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \text{ si } \overrightarrow{GI}=\frac{c-2a-2b}{3(a+b+c)}\overrightarrow{BA}+\frac{2b+2c-a}{3(a+b+c)}\overrightarrow{BC} \text{ (3p)}$$

Condiția de coliniaritate a punctelor G,I,M ne dă relația 4a=2b+5c.(2p)